DZIEWIĄTE SPRAWOZDANIE

DYREKCYI

C. K. WYŻSZÉJ SZKOŁY REALNÉJ

W KRAKOWIE

za rok szkolny 1884.

KRAKÓW.

Nakładem funduszu naukowego.

W drukarni A. Koziańskiego, Szewska 21.

1884.

TREŚĆ:

ELEMENTARNE ROZWIĄZANIE
niektórych zagadnień

opracował
Grzegorz Grzybowski.

Poniżej podaję elementarne opracowanie niektórych zagadnień, które w tej formie mogłyby wchodzić w naukę szkolną we wyższych klasach szkół średnich ewentualnie jako piśmienne zadania przy examinie dojrzałości.

Elementare Bearbeitung einiger Aufgaben für die oberen Klassen der Mittelschule,

von
Gregor Grzybowski.

I. Zagadnienie.

„Jaką linię krzywą wykréśli **wierzchołek N kąta prostego,** którego **ramiona się dotykają krzywéj drugiego stopnia**“?

Rozw. Najstósowniéj wziąć pod rozwagę najprzód elipsę

$a^2 . y^2 . + b^2 . x^2 = a^2 . b^2$; która dla

$a = \infty$ przechodzi w parabolę, a

dla $b = b' . \sqrt{-1}$ „ w hyperbolę.

Ogólne równanie stycznéj poprowadzonéj do tejże elipsy przez punkt dotykania $T = (\xi, \eta)$ będzie.....

1.)..... $a^2 . y . \eta + b^2 . x . \xi = a^2 . b^2$.

Ponieważ T leży na obwodzie elipsy, przeto

$$\eta = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - \xi^2}; \text{ zatém}$$

równanie stycznéj..... 1) zamienia się na następujące:

$$2.)..... \; y = -\frac{a}{b} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \cdot x + \frac{a . b}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} .$$

Gdyby ta styczna miała przechodzić przez **inny** punkt $M = (x = m; y = n)$; zewnątrz elipsy to by musiało

$$3.)... \text{ być}.... \; n = -\frac{b}{a} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \cdot m + \frac{a . b}{\sqrt{a^2 - \xi^2}};$$ z którego to równania wynika po rozwiązaniu:

$$4.).... \; \xi_{1,2} = \frac{a^2}{a^2 . n^2 + b^2 . m^2} \left[b^2 . m \pm n . \sqrt{a^2 . n^2 + b^2 . m^2 - a^2 . b^2} \right]$$

Po należytém obliczeniu wynikają z tego równania następujące:

$$5.).. \; \sqrt{a^2 - \xi^2} = \frac{a . b}{a^2 . n^2 + b^2 . m^2} \left[a^2 . n + m . \sqrt{a^2 . n^2 + b^2 . m^2 - a^2 . b^2} \right]$$

tudzież

$$6).... \; y = -\frac{\left[m . n \pm \sqrt{a^2 . n^2 + b^2 m^2 - a^2 . b^2} \right] x}{a^2 - m^2} +$$

$$+ \frac{\left[a^2 . n \pm m . \sqrt{a^2 . n^2 + b^2 . m^2 - a^2 . b^2} \right]}{a^2 - m^2};$$ i to jest

równanie prostéj, wyprowadzonéj z punktu.... $M = (x = m; y = n)$, dotykającéj się elipsy; a takich stycznych widocznie dwie, n. p. S_1 i S_2.

Te proste są pochylone ku osi.... X, a mianowicie: S_1 pod kątem α_1; S_2 zaś pod kątem.... α_2; tak, że

$$\operatorname{tang} \alpha_1 = - \frac{+ m . n + \sqrt{a^2 . n^2 + b^2 . m^2 - a^2 . b^2}}{a^2 - m^2},$$

$$\operatorname{tang} \alpha_2 = - \frac{+ m . n - \sqrt{a^2 . n^2 + b^2 . m^2 - a^2 . b^2}}{a^2 - m^2};$$

Jeżeli te 2 styczne mają ze sobą zawierać kąt prosty, to należy położyć.... $\operatorname{tang} \alpha_1 . \operatorname{tang} \alpha_2 = -1$; a natenczas będzie:

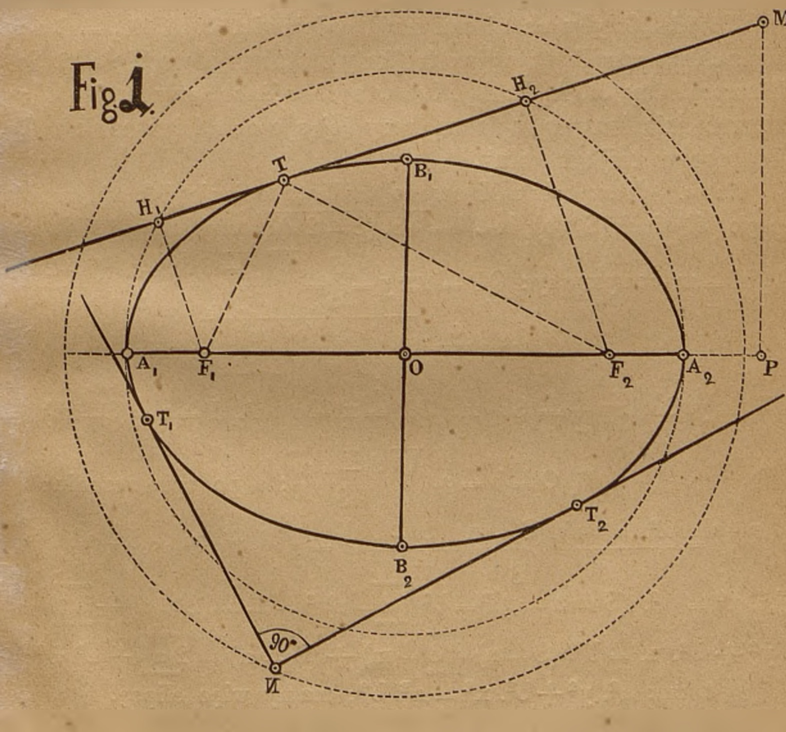
7.).... $m^2 . n^2 + a^2 . b^2 - a^2 . n^2 - b^2 . m^2 = - a^4 + 2 . a^2 . m^2 + m^4$;

a to równanie z łatwością się zamienia na następujące:

$$(a^2 + b^2)(a^2 - m^2) = (m^2 + n^2)(a^2 - m^2);$$

czyli w takim razie będzie:

Fig. 1.



8.)\.... $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$; t. zn: wszystkie punkty jak n. p. N, z których obie styczne do elipsy tworzą kąt prosty, leżą na obwodzie **koła** ze środka O zatoczonego promieniem \.... $\sqrt{a^2 + b^2}$.

U paraboli owe koło zamienia się na kierownicę;

U hyperboli dla $a = b$ mamy punkt 0. 0, a dla\.... $a > b$ mamy koło opisane promieniem $\sqrt{a^2 - b^2}$;

dla $a < b$ wreszcie prostopadłych stycznych wcale niema.

II. Zagadnienie programowe

c. k. II wyż. gimn. we Lwowie 1873;

przerobił Grzegorz Grzybowski 1884.

Zagad. „Gdyby na niezmiennéj podstawie\.... $A_1 A_2 = 2a$; powykréślano wszelkie możliwe **trójkąty o stałym obwodzie** $= 2. S$; [równoramienny\.... $A_1 K_1 A_2$, lub w ogóle różnoboczny $A_1 M A_2$]; **oznaczyć linią krzywą, opisaną** przy téj sposobności **środkiem O wpisanego w trójkąt koła**".

Rozw. Wierzcholek M owego trójkąta opisuje jak wiadomo elipsę o półosiach $(S - a)$; i\... $b = \sqrt{S. (S - 2a)}$; otóż kładąc $A_1 M = n$; a $A_2 M = m$ otrzymamy: $QP = r_w = y = \frac{F}{S} = \sqrt{\frac{(S-m).(S-n).(S-2a)}{S}}$

$$\text{Cotang} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{S.(S-m)}{(S-n).(S-2a)}}; \text{ więc}$$

$$A_1 P = y. \text{Cotang} \frac{\alpha}{2} = S - m; \quad OP = x = a - A_1 P = a - (S - m)$$

$$B_1 O = b = a. \sqrt{\frac{S - 2a}{S}}; \text{ a po uproszczeniu:}$$

$$a^2. y^2 = \frac{a^2.(S-m).(S-m)(S-2a)}{S} = b^2. (S - m). (S - n)$$

$$b^2. x^2 = b^2. (S - n - a)^2 = b^2 \left[(S - n)^2 - 2. a. (S - n) + a^2\right]$$

$$a^2. y^2 + b^2. x^2 = b^2. (S - n) \left[(S - m) + (S - n) - 2a\right] + a^2. b^2;$$

t. zn.: $a^2. y^2 + b^2. x^2 = a^2. b^2$; mamy więc elipsę.

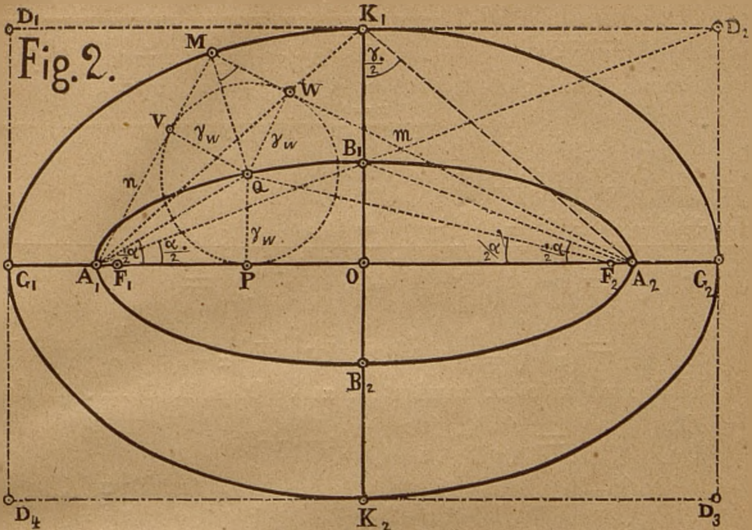


Fig. 2.

W tej formie to zagadnienie może być dane nawet przy examinie dojrzałości.

III. Kombinatoryczne wzory sumowe.

$$n! = 1.\,2.\,3.\,4.\,5 \ldots (n-1).\,n. \qquad 7! = 5040.$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n.\,(n-1).\,(n-2)\ldots\ldots(n-p+1)}{1.\quad 2\quad .\quad 3\quad \ldots\ldots\quad p} = \binom{9}{3} = 84.$$

$$\boxed{\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} = \binom{n+1}{p}} \quad ; \quad \binom{9}{3} + \binom{9}{2} = \binom{10}{3} = 84 + 36 = 120.$$

$$\left.\begin{aligned}
\binom{p+1}{p+1} + \binom{p+1}{p} = \binom{p+2}{p+1} &= \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} \\
\binom{p+3}{p+1} &= \binom{p+2}{p+1} + \binom{p+2}{p} \\
\binom{p+4}{p+1} &= \binom{p+3}{p+1} + \binom{p+3}{p} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\binom{n+p-1}{p+1} &= \binom{n+p-2}{p+1} + \binom{n+p-2}{p} \\
\binom{n+p}{p+1} &= \binom{n+p-1}{p+1} + \binom{n+p-1}{p} \\
\binom{n+p+1}{p+1} &= \binom{n+p}{p+1} + \binom{n+p}{p}
\end{aligned}\right\} \text{po dodaniu}$$

$$\binom{n+p+1}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \binom{p+3}{p} + \ldots + \binom{n+p}{p}$$

to znaczy symbolicznie:
$$\mathop{S}_{n=0}^{n=\infty}\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p+1}.$$

Przykład:

$$\binom{5}{5}+\binom{6}{5}+\binom{7}{5}+\binom{8}{5}+\binom{9}{5}+\binom{10}{5}+\binom{11}{5}=\binom{12}{6}.$$
$$1+6+21+56+126+252+462=924.$$

$$r.\binom{m}{\alpha}\cdot\binom{n}{r-\alpha}=(r-\alpha)\cdot\binom{m}{\alpha}\cdot\binom{n}{r-\alpha}+\alpha\binom{m}{\alpha}\binom{n}{r-\alpha}=$$
$$=\binom{m}{\alpha}\cdot\binom{n}{r-\alpha-1}\cdot(n-r+\alpha+1)+\cdot\binom{m}{\alpha-1}\cdot\binom{n}{r-\alpha}(m-\alpha+1)$$

daje kładąc po kolei... zamiast... α.... 0, 1, 2, 3,.... aż do r.

$$r.\begin{cases}\binom{m}{0}\ \binom{n}{r}=\binom{m}{0}\cdot\binom{n}{r-1}\cdot(n-r+1)\\ \binom{m}{1}\cdot\binom{r-1}{n}=\binom{m}{1}\cdot\binom{n}{r-2}\cdot(n-r+2)+\binom{m}{0}\binom{n}{r-1}\cdot m\\ \binom{m}{2}\cdot\binom{n}{r-2}=\binom{m}{2}\cdot\binom{n}{r-3}\cdot(n-r+3)+\binom{m}{0}\cdot\binom{n}{r-2}\cdot(m-1)\end{cases}$$

---

po sumowaniu $S\binom{m}{\alpha}\binom{r-\alpha}{n}=S\binom{m}{\alpha}\binom{n}{r-\alpha-1}\frac{m+n-r-\alpha+1}{r}$

czyli: $$S\binom{m}{\alpha}\binom{n}{r-\alpha}=\binom{m+n}{r}.$$

$$\mathop{S}_{r=0}^{r=\infty}\binom{m}{r}\binom{n}{r}=\binom{m}{0}\cdot\binom{n}{0}+\binom{m}{1}\cdot\binom{n}{1}+\binom{m}{2}\cdot\binom{n}{2}+\cdots+\binom{m}{r}\cdot\binom{n}{r}+\cdots$$
$$=\binom{m-1}{0}\cdot\binom{n}{0}+\left[\binom{m-1}{1}+\binom{m-1}{0}\right]\binom{n}{1}+\left[\binom{m-1}{2}+\binom{m-1}{1}\right]\binom{n}{2}+$$
$$+\left[\binom{m-1}{3}+\binom{m-1}{2}\right]\binom{n}{3}+\left[\binom{m-1}{4}+\binom{m-1}{3}\right]\binom{n}{4}+\cdots$$
$$=\binom{m-1}{0}\cdot\binom{n+1}{1}+\binom{m-1}{1}\cdot\binom{n+1}{2}+\binom{m-1}{2}\binom{n+1}{3}+\binom{m-1}{3}\binom{n+1}{4}+$$
$$+\binom{m-1}{4}\binom{n+1}{5}+\cdots$$

i t. d. kolejno

$$=\binom{m-a}{0}\cdot\binom{n+a}{a}+\binom{m-a}{1}\binom{n+a}{a+1}+\binom{m-a}{2}\binom{n+a}{a+2}+\binom{m-a}{3}\binom{n+a}{a+3}+\cdots$$
$$=\mathop{S}_{r=0}^{r=\infty}\binom{m-a}{r}\cdot\binom{n+a}{a+r}=\boxed{\mathop{S}_{r=0}^{r=\infty}\binom{m}{r}\cdot\binom{n}{r}=S\binom{m-a}{r}\binom{n+a}{a+r}}$$

Przykład.

$$\binom{7}{0}\binom{9}{0}+\binom{7}{1}\binom{9}{1}+\binom{7}{2}\binom{9}{2}+\binom{7}{3}\binom{9}{3}+\binom{7}{4}\binom{9}{4}+\binom{7}{5}\binom{9}{5}+\binom{7}{6}\binom{9}{6}+\binom{7}{7}\binom{9}{7}=$$

$$=1.1+7.9+21.36+35.84+35.126+21.126+7.84+1.36=$$

$$=1+63+756+2940+4410+2646+588+36=11440$$

$$=\binom{4}{0}\cdot\binom{12}{3}+\binom{4}{1}\binom{12}{4}+\binom{4}{2}\binom{12}{5}+\binom{4}{3}\binom{12}{6}+\binom{4}{4}\binom{12}{7}=$$

$$=1.220+4.495+6.792+4.924+1.792=11440.$$

konsekwentnie:

$$\binom{m}{0}\cdot\binom{n}{0}+\binom{m}{1}\cdot\binom{n}{1}+\binom{m}{2}\cdot\binom{n}{2}+\binom{m}{3}\cdot\binom{n}{3}+=\mathop{S}_{r=0}^{r=\infty}\binom{m}{r}\binom{n}{r}=\binom{m+n}{m}$$

Przykład:

$$\binom{7}{0}\binom{9}{0}+\binom{7}{1}\binom{9}{1}+\binom{7}{2}\binom{9}{2}+\binom{7}{3}\binom{9}{3}+\binom{7}{4}\binom{9}{4}+\binom{7}{5}\binom{9}{5}+\binom{7}{6}\binom{9}{6}+\binom{7}{7}\binom{9}{7}=\binom{16}{7}=11440$$

$$\binom{m}{0}\binom{n}{a}+\binom{m}{1}\binom{n}{a+1}+\binom{m}{2}\cdot\binom{n}{a+2}+=\mathop{S}_{r=0}^{r=\infty}\binom{m}{r}\binom{n}{a+r}=\mathop{S}_{r=0}^{r=\infty}\binom{m-b}{r}\binom{n+b}{a+b+r}$$

$$\mathop{S}_{r=0}^{r=\infty}\binom{m}{r}\binom{n}{r+a}=\mathop{S}_{r=0}^{r=\infty}\binom{m+a}{r}\binom{n-a}{r}=\mathop{S}_{r=0}^{r=\infty}\binom{m+b}{r}\cdot\binom{n-b}{r+a-b}=\binom{m+n}{m+a}$$

$$\mathop{S}_{r=0}^{r=\infty}\binom{m}{r}\binom{n}{r-a}=\mathop{S}_{r=0}^{r=\infty}\binom{m-a}{r}\binom{n+a}{r}=\binom{m+n}{m-a}$$

IV.

Mamy .... $\binom{n+1}{2}=\frac{n^2+n}{2}$; zatem .... $n^2=2\binom{n+1}{2}-\binom{n}{1}$; a przez podstawienie:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots\pm n^2=\sum n^2=2\binom{n+2}{3}-\binom{n+1}{2}=$$

$$=\frac{(2n+1).(n+1).n}{6}$$

Przykład.

$$1+4+9+16+25+36+49+64+81+100+121+144+168+196+225+$$
$$+456+289+324+361=$$

$\sum 19^2=\frac{39.20.19}{6}=2470$; można także napisać $\sum n^2=\frac{n^3}{6}(2+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})$

a dla $n=\infty$ będzie $\sum n^2=\frac{n^3}{3}$.

Dalej.... $\binom{n+1}{3}=\frac{n^3-n}{6}$ daje.... $n^3=6.\binom{n+1}{3}+n$; więc

$$\sum n^3=6.\binom{n+2}{4}+\sum n; \text{ t. j.}$$

$$\sum n^3=3!\binom{n+2}{4}+\binom{n+1}{2}\ldots\ldots; \text{ a dla } n=\infty \sum n^3=\frac{n^4}{4}.$$

Przykład.

1+8+27+64+125+216+343+572+729+1000+1331+1728†2197=
8281 = 8190 + 91 .

V.

$$S_n=\sum_{m=-\infty}^{m=1}\frac{m^n}{m!}=\frac{1^n}{1}+\frac{2^n}{1.2}+\frac{3^n}{1.2.3}+\frac{4^n}{1.2.3.4}+\frac{5^n}{1.2.3.4.5}+\frac{6^n}{1.2.3.4.5.6}+\ldots?.$$

daje:

$$S_1=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots\ldots=e;\ S_2=S_1+S_1=2.\ e;$$

$$S_3=\left\{S_2+\left[S_2+S_1\right]\right\}=5\ e.$$

$$S_4=\left\{S_3+\left[S_3+2S_2+S_1\right]\right\}=15.\ e.$$

$$S_5=\left\{S_4+\left[S_4+3.S_3+3.S_2+S_1\right]\right\}=52.\ e.$$

$$S_6=\left\{S_5+\left[S_5+4.S_4+6.S_3+4.S_2+S_1\right]\right\}=203.\ e.$$

i t. p.

$$S_7=877.\ e;\ S_8=4140.\ e.\ldots\ldots$$

VI.

$$S=\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots+\frac{1}{\frac{n}{2}.(n+1)}+\ldots=?$$

$$\frac{1}{2}.S=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots\ldots+\frac{1}{n.(n+1}=1;\ \text{zatém}$$

ściągając człony parami $S=2.$

VII.

$$S=\frac{1}{3}+\frac{1}{3+5}+\frac{1}{3+5+7}+\frac{1}{3+5+7+9}+\cdots\cdots+\frac{1}{n.(n+2)}+\cdots=?$$

$$s_1=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}+\cdots=\frac{1}{2}$$

$$s_2=\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+\frac{1}{1.10}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n(n+1)}+\cdots=\frac{1}{4};$$

ostatecznie: $S=\frac{3}{4}$.

VIII.

$S=\frac{a}{d}+\frac{a+b}{d.q}+\frac{a+2b}{d.q^2}+\cdots\cdots+\frac{a+n.b}{d.q^n}+\cdots=?$ odjąwszy to równanie od q. S; otrzymamy dla... $q>1$; $n=\infty$; ostatecznie

$$S=\frac{q}{d.(q-1)}\cdot\left[a+\frac{b}{q-1}\right].$$

IX.

$$S=\frac{1}{a.(a+b)}+\frac{1}{(a+b)(a+2b}+\frac{1}{(a+2b)(a+3b)}+\cdots\cdots+$$

$$+\frac{1}{[a+n.b][a+(n+1)b]}\cdots\cdots$$ więc:

$$b.S=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}\right)+\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+2b}\right)+\left(\frac{1}{a+2b}-\frac{1}{a+3b}\right)+\cdots=\frac{1}{a};$$

ostatecznie $S=\frac{1}{a.b}$.

X.

$$S=\frac{1}{a(a+b)(a+2b)}+\frac{1}{(a+b)(a+2b)(a+3b)}+\cdots\cdots+$$

$$+\frac{1}{[a+nb][a+(n+1)b][+a+(n+2)b]}+\cdots\cdots$$

$$2.b.S=\frac{1}{a+b}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{a+2b}\right]+\frac{1}{a+2b}\left[\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+3b}\right]+$$

$$+\frac{1}{a+3b}\left[\frac{1}{a+2b}-\frac{1}{a+4b}\right]+\cdots=\left[\frac{1}{a.(a+b)}\right];$$ ostatecznie $S=\frac{1}{2.a.b.(a+b)}$.

XI.

$$S=\frac{a}{c.(c+2d)(c+4d)}+\frac{a+b}{(c+d)(c+3d)(c+5d)}+\frac{a+2.b}{(c+2d)(c+4d)(c+6d)}+$$

$$+\frac{a+3.b}{(c+3d)(c+5d)(c+7d)}\cdots+\frac{a+n.b}{[c+nd].[c+(n+2).d].[c+(n+4).d]}=?$$

Te człony można rozdzielić na parzyste i na nieparzyste, a ostatecznie będzie:

$$S=\left[\frac{a.d+b.c}{c(c+2.d)}+\frac{(a+b).d+(c+d).b}{(c-d).(c-3d)}\right]\frac{1}{4d^2}.$$

Dla ... $a=b=d=1$; $c=2$; otrzymamy:

$$S=\frac{1}{2.4.6}+\frac{2}{3.5.7}+\frac{3}{4.6.8}+\frac{4}{5.7.9}+\frac{5}{6.8.10}+\frac{6}{7.9.11}+\cdots=\frac{17}{96}.$$

XII.

$$S=\frac{1}{a(a+b)(a+2b)(a+3b}+\frac{1}{(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b)}+\cdots$$
$$+\frac{1}{[a+nb][a+(n+1).b][a+(n+2).b][a+(n+3).b]\ldots}$$ zatém

$$2.b.^2S=\left[\frac{1}{a.(a+3b)}-\frac{1}{(a+b)(a+2b)}\right]+\left[\frac{1}{(a+b)(a+4.b)}-\frac{1}{(a+2b)(a+3b)}\right]+$$
$$+\left[\frac{1}{(a+2b)(a+5b)}-\frac{1}{(a+3b)(a+4b)}\right]+\left[\frac{1}{(a+3b)(a+6b)}-\frac{1}{(a+4b)(a+5b)}\right]$$

otóż:

$$s_1=\frac{1}{a(a+3b)}+\frac{1}{(a+3b)(a+6.b)}+\frac{1}{(a+6b)(a+9b)}+\cdots$$
$$+\frac{1}{[a+3.n.b][a+(3n+1)b]}=\frac{1}{3ab};$$

$$s_2=\frac{1}{(a+b)(a+4b)}+\frac{1}{(a+4b)(a+7b)}+\frac{1}{(a+7b)(a+10b)}+\cdots$$
$$+\frac{1}{[a+(3n+1).b][a+(3n+4)b.]}=\frac{1}{3.(a+b).b};$$

$$s_3=\frac{1}{(a+2b)(a+5b)}+\frac{1}{(a+5b)(a+8b)}+\frac{1}{(a+8b)(a+11.b)}+\cdots$$
$$+\frac{1}{[a+(3n+2)b][a+(3n+5).b]}=\frac{1}{3.(a+2b).b};$$

$$s_4=\frac{1}{(a+b)(a+2b)}+\frac{1}{(a+2b)(a+3b)}+\frac{1}{(a+3b)(a+4b)}+\cdots$$
$$+\frac{1}{[a+(n+1).b][a+(n+2).b]}=\frac{1}{(a+b).b}.$$

$$2.b^2.S=s_1+s_2+s_3-s_4=\frac{3.a.b.(+b).(a+2b)}{2.\ b^2};$$ ostatecznie:

$$S=\frac{1}{3.a.b.(a+b).(a+2.b)}.$$

XIII.

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1.1}{2.4} + \frac{1.1.3}{2.4.6} + \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.3.10} + ? \ldots \; u_1 = \frac{1}{2};$$

$$u_n = u_{n-1} \cdot \frac{2.n-3}{2n}.$$ Mamy rachunek:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \text{Uzup} = 1 - \frac{1.3}{2.4} + \text{Uzup} = 1 - \frac{1.3}{2.4}\left(1 - \frac{1}{6}\right) +$$

$$\text{Uzup} = 1 - \frac{1.3.5}{2.4.6} + \text{Uzup} = 1 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(1 - \frac{1}{8}\right) + \text{Uzup} = 1 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} +$$

Uzup.... ostatecznie: $S = 1.$

XIV.

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.6} + \frac{1.3.5}{4.6.8} + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10} + \frac{1.3.5.7.9}{4.6.8.10.12} + \ldots ?$$ więc będzie:

$$\frac{1}{2} \cdot S = \frac{1}{2.4} + \frac{1.1.3}{2.4.6} + \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10} + \frac{1.1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12} \ldots = \frac{1}{2};$$

ostatecznie ze względu na powyższe równanie:

$$S = 1.$$

XV.

$$S = 1 + \frac{1.3}{6} + \frac{1.3.5}{6.8} + \frac{1.3.5.7}{6.8.10} + \frac{1.3.5.7.9}{6.8.10.12} \ldots = ?$$ Podzieliwszy przez.. 2 4.

otrzymamy:

$$\frac{1}{8} S = \frac{1}{2.4} + \frac{1.1.3}{2.4.6} + \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10} + \frac{1.1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12} + \ldots = \frac{1}{2}$$

ze względu na górne równanie, ostatecznie:

$$S = 4.$$

XVI.

Połączenia do pewnego ogółu.

Wzór: $(a+b):(a+1)=q+\frac{r}{a+1}$; $(a+b)=(a+1)\cdot(q-1)+$
$+(a+r+1)$.

1

2

3

---

2 2
4

---

2 3
5

---

2 2 2
2 4
3 3
6

---

2 2 3
2 5
3 4
7

---

2 2 2 2
2 2 4
2 3 3
3 5
4 4
2 6
8

---

2 2 2 3
2 2 5
2 3 4
2 7
3 3 3
3 6
4 5
9

---

2 2 2 2 2
2 2 2 4
2 2 3 3
2 2 6
2 3 5
2 4 4
2 8
3 3 4
3 7
4 6
5 5
10

---

2 2 2 2 3
2 2 2 5
2 2 3 4
2 2 7
2 3 3 3
2 3 6
2 4 5
2 9
3 3 5
3 4 4
3 8
4 7
5 6
11

---

2 2 2 2 2 2
2 2 2 2 4
2 2 2 3 3
2 2 2 6
2 2 3 5
2 2 4 4
2 2 8
2 3 3 4
2 3 7
2 4 6
2 5 5
2 10
3 3 3 3
3 3 6
3 4 5
3 9
4 4 4
4 8
5 7
6 6
12

---

2 2 2 2 2 3
2 2 2 2 5
2 2 2 3 4
2 2 2 7
2 2 3 3 3
2 2 3 6

2 2 4 5
2 2 9
2 3 3 5
2 3 4 4
2 3 8
2 4 7
2 5 6
2 11
3 3 3 4
3 3 7
3 4 6
3 5 5
3 10
4 4 5
4 9
5 8
6 7
13

---

2 2 2 2 2 2 2
2 2 2 3 2 4
2 2 2 2 3 3
2 2 2 2 6
2 2 2 3 5
2 2 2 4 4
2 2 2 8
2 2 3 3 4
2 2 3 7
2 2 4 6
2 2 5 5
2 2 10
2 3 3 3 3
2 3 3 6
2 3 4 5
2 3 9
2 4 4 4
2 4 8
2 5 7

2 6 6
2 12
3 3 3 5
3 3 4 4
3 3 8
3 4 7
3 5 6
3 11
4 4 6
4 5 5
4 10
5 9
6 8
7 7
14

---

2 2 2 2 2 2 3
2 2 2 2 2 5
2 2 2 2 3 4
2 2 2 2 7
2 2 2 3 3 3
2 2 2 3 6
2 2 2 4 5
2 2 2 9
2 2 3 3 5
2 2 3 4 4
2 2 3 8
2 2 4 7
2 2 5 6
2 2 11
2 3 3 3 4
2 3 3 7
2 3 4 6
2 3 5 5
2 3 10
2 4 4 5
2 4 9
2 5 8

2 6 7
2 13
3 3 3 3 3
3 3 3 6
3 3 4 5
3 3 9
3 4 8
3 5 7
3 6 6
3 12
4 4 7
4 5 6
4 11
5 5 5
5 10
6 9
7 8
15

---

2 2 2 2 2 2 2 2
2 2 2 2 2 2 4
2 2 2 2 2 3 3
2 2 2 2 2 6
2 2 2 2 3 5
2 2 2 2 4 4
2 2 2 2 8
2 2 2 3 3 4
2 2 2 3 7
2 2 2 4 6
2 2 2 5 5
2 2 2 10
2 2 3 3 3 3
2 2 3 3 6
2 2 3 4 5
2 2 3 9
2 2 4 4 4
2 2 4 8
2 2 5 7

2 2 6 6
2 2 12
2 3 3 3 5
2 3 3 4 4
2 3 3 8
2 3 4 7
2 3 5 6
2 3 11
2 4 4 6
2 4 5 5
2 4 10
2 5 9
2 6 8
2 7 7

2 14
3 3 3 3 4
3 3 3 7
3 3 4 6
3 3 5 5
3 3 10
3 4 4 5
3 4 9
3 5 8
3 6 7
3 13
4 4 4 4
4 4 8
4 5 7

4 6 6
4 12
5 5 6
5 11
6 10
,7 9
8 8
16

... 2 2 3
... 2 5
... 2 : 2 7
2 2 7
2 3 .. 3 3
i t. d.

Przykład połączenia o ogóle ... 10.

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 2
1 1 1 1 1 1 1 3
1 1 1 1 1 1 2 2
1 1 1 1 1 1 4
1 1 1 1 1 2 3
1 1 1 1 1 5
1 1 1 1 2 2 2
1 1 1 1 2 4
1 1 1 1 3 3
1 1 1 1 6
1 1 1 2 2 3
1 1 1 2 5
1 1 1 3 4
1 1 1 7
1 1 2 2 2 2
1 1 2 2 4
1 1 2 3 3
1 1 2 6
1 1 3 5
1 1 4 4
1 1 8

1 1 2 2 3
1 2 2 5
1 2 3 4
1 2 7
1 3 3 3
1 3 6
1 4 5
1 9

2 2 2 2 2
2 2 2 4
2 2 3 3
2 2 6
2 3 5
2 4 4
2 8
3 3 4
3 7
4 6
5 5
10